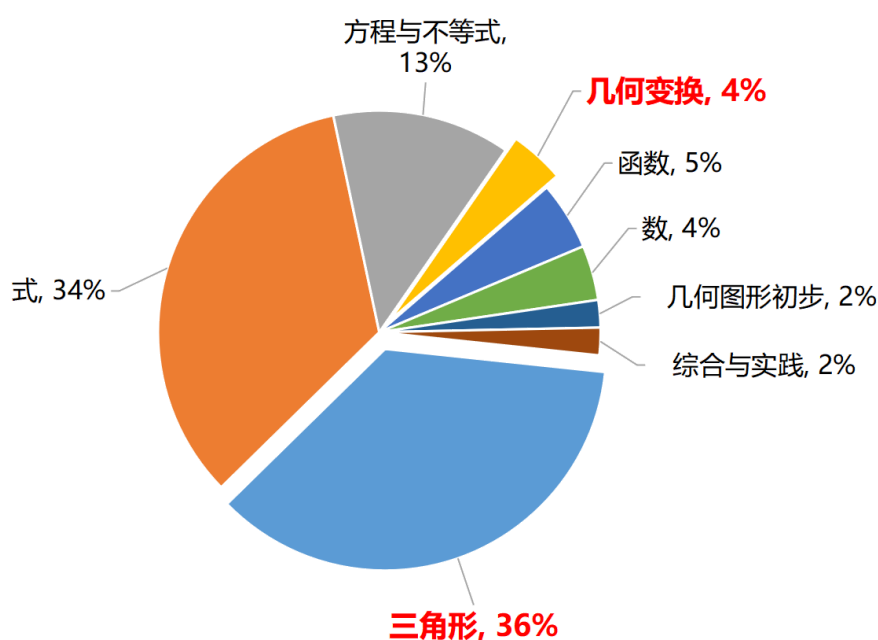


第1讲角平分线的性质与判定

角平分线是全等三角形判定知识的运用和延续，是《轴对称与角平分线初步》的后续模块，主要包括角平分线的性质、判定及其常见辅助线，在考试中考察形式较为多样，大题小题均有涉及，其中模型部分综合性较强，需要学生熟练运用全等三角形、角平分线等知识

本模块难度较高，适用于角平分线的专题学习，本模块分为角平分线的性质与判定、角平分线模型2讲内容，配套练习与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼

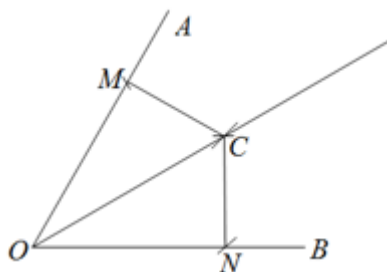


知识点	难度	考频
角平分线的作图	★★	低
角平分线的性质	★★★	高
角平分线的判定	★★★	高
角平分线的模型	★★★★★	高

一、角平分线的画法

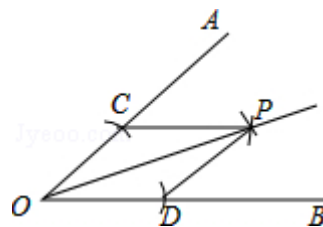
已知： $\angle AOB$ ．求作： $\angle AOB$ 的平分线．作法：

- (1) 以 O 为 圆心，适当长为 半径 画弧，交 OA 于 M ，交 OB 于 N ．
- (2) 分别以 点 M, N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在 $\angle AOB$ 的内部交于点 C ．
- (3) 画射线 OC ．射线 OC 即为所求（如图所示）．



栗子1

1. 尺规作图作 $\angle AOB$ 的平分线方法如下：以 O 为圆心，任意长为半径画弧交 OA 、 OB 于 C 、 D ，再分别以点 C 、 D 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}CD$ 长为半径画弧，两弧交于点 P ，作射线 OP ，由作法可得 $\triangle OCP \cong \triangle ODP$ ，判定这两个三角形全等的根据是（ ）．



A. SAS

B. ASA

C. AAS

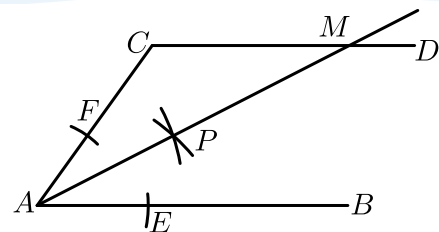
D. SSS

【答案】D

【解析】由画法得 $OC = OD$ ， $PC = PD$ ，
而 $OP = OP$ ，
所以 $\triangle OCP \cong \triangle ODP$ (SSS)，
所以 $\angle COP = \angle DOP$ ，
即 OP 平分 $\angle AOB$ ．
故选D．

【标注】【知识点】作角平分线

2. 如图， $AB \parallel CD$ ，以点 A 为圆心，小于 AC 的长为半径画弧，分别交 AB ， AC 于点 E ， F ，再分别以点 E ， F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径画弧，两弧交于点 P ，作射线 AP ，交 CD 于点 M ，若 $\angle CMA = 25^\circ$ ，则 $\angle C$ 的度数为（ ）．



A. 100°

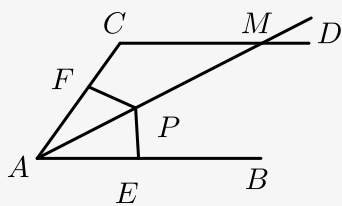
B. 110°

C. 120°

D. 130°

【答案】 D

【解析】 连接 PE , PF , 由作法可知:



$$AF = AE, PF = PE,$$

$\therefore$ 在 $\triangle AFP$ 和 $\triangle AEP$ 中,

$$\begin{cases} AF = AE \\ PF = PE \\ AP = AP \end{cases}$$

$\therefore \triangle AFP \cong \triangle AEP$ (SSS),

$$\therefore \angle FAP = \angle EAP,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BAM = \angle CMA = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle CAP = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle CMA - \angle CAP = 130^\circ.$$

【标注】 【能力】推理论证能力

【知识点】SSS

【知识点】角分线性质定理

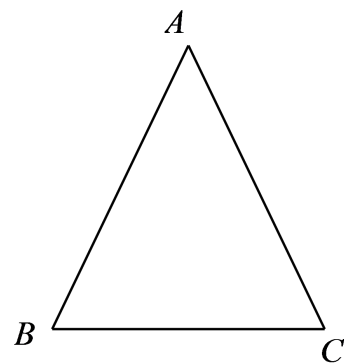
【知识点】全等三角形的性质

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】作角平分线

栗子2

3. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \angle ACB$.



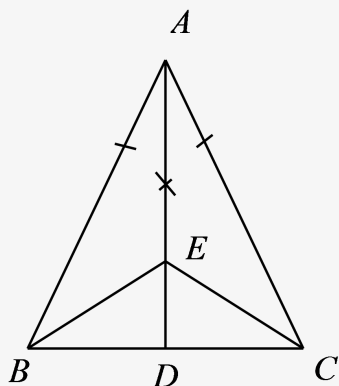
(1) 尺规作图：过顶点 A 作 $\triangle ABC$ 的角平分线 AD ；(不写作法，保留作图痕迹)

(2) 在 AD 上任取一点 E ，连接 BE 、 CE ．求证： $\triangle ABE \cong \triangle ACE$ ．

【答案】 (1) 见解析．

(2) 证明见解析．

【解析】 (1) 如图所示：



(2) $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD,$$

$$\because \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$\because$ 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACE$ 中

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAE = \angle CAE, \\ AE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACE \text{ (SAS)} .$$

【标注】【知识点】SAS

【知识点】作角平分线

【能力】推理论证能力

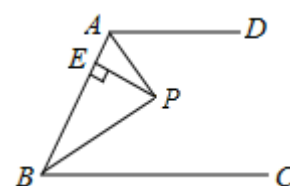
二、角平分线的性质与判定

	角平分线的性质	角平分线的判定
图形		
概念	角的平分线上的点到角的两边的	角的 <u>内部</u> 到角的两边的 <u>距离相等</u> 的点在角的平分线上
已知	OP 平分 $\angle AOB$, $PD \perp OA$ 于 D , $PE \perp OB$ 于 E	$PD = PE$, $PD \perp OA$ 于 D , $PE \perp OB$ 于 E
结论	<u>$PD = PE$</u>	<u>OP 平分 $\angle AOB$</u>

1. 角平分线的性质

栗子3

4. 如图, $AD \parallel BC$, $\angle ABC$ 的平分线 BP 与 $\angle BAD$ 的平分线 AP 相交于点 P , 作 $PE \perp AB$ 于点 E , 若 $PE = 3$, 则点 P 到 AD 与 BC 的距离之和为 ().



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

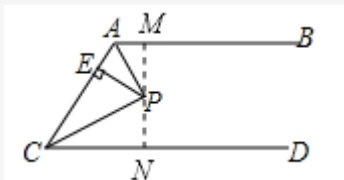
【答案】D

【解析】如图, 过点 P 作 $PM \perp AB$ 于 M , 作 $PN \perp CD$ 于 N ,
 $\because AP, CP$ 分别平分 $\angle BAC, \angle ACD, PE \perp AC$,
 $\therefore PM = PE = PN = 3\text{cm}$,
 $\because AB \parallel CD, PM \perp AB$,
 $\therefore PM \perp CD$,

$\therefore PN \perp CD$,

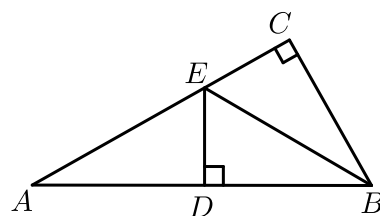
$\therefore M、P、N$ 三点共线,

$\therefore AB$ 与 CD 之间的距离 $= PM + PN = 6\text{cm}$.



【标注】【知识点】角分线性质定理

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, BE 平分 $\angle ABC$, $DE \perp AB$ 于点 D , 如果 $AC = 3\text{cm}$, 那么 $AE + DE$ 等于 () .



A. 2cm

B. 3cm

C. 4cm

D. 5cm

【答案】 B

【解析】 $\because BE$ 平分 $\angle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $DE \perp AB$ 于点 D ,

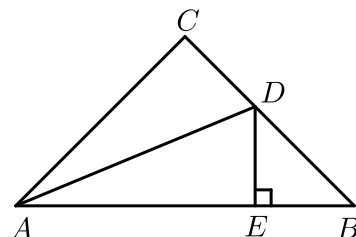
$\therefore CE = DE$,

$\therefore AE + DE = AE + CE = AC = 3\text{cm}$.

故选B.

【标注】【知识点】角分线性质定理

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D , $DE \perp AB$ 于点 E , 若 $AB = 8$, 则 $\triangle DEB$ 的周长为 () .



A. 4

B. 6

C. 8

D. 10

【答案】C

【解析】 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\angle C = 90^\circ, DE \perp AB,$$

$$\therefore CD = DE,$$

$$\therefore AC = AE,$$

$$\therefore AC = AE = BC.$$

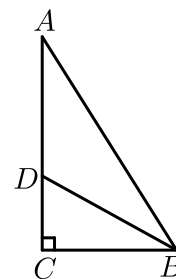
$$\begin{aligned}\therefore C_{\triangle DEB} &= BD + DE + BE \\ &= BD + CD + BE \\ &= BC + BE \\ &= AE + BE \\ &= AB \\ &= 8.\end{aligned}$$

故选C.

【标注】【知识点】角分线性质定理

栗子4

7. 如右图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$. 若 $CD = 3$, $BC + AB = 16$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为().



A. 16

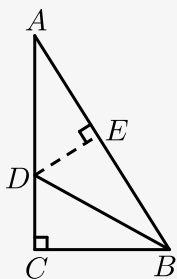
B. 18

C. 24

D. 32

【答案】C

【解析】过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ,

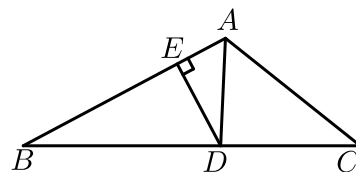


$$\begin{aligned}
&\because \angle ACB = 90^\circ, \\
&\therefore DC \perp CB, \\
&\because BD \text{ 平分 } \angle ABC, DE \perp AB, DC \perp BC, \\
&\therefore DE = DC = 3, \\
&\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DCB} + S_{\triangle DAB} \\
&\quad = \frac{1}{2} DC \cdot BC + \frac{1}{2} DE \cdot AB \\
&\quad = \frac{1}{2} \times 3 \times (BC + AB) \\
&BC + AB = 16, \\
&\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 16 = 24, \\
&\text{故选 C.}
\end{aligned}$$

【标注】【能力】推理论证能力

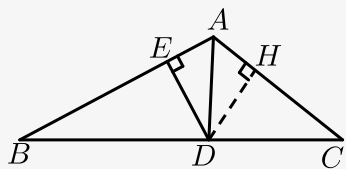
【知识点】角分线性质定理

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 的角平分线 AD 与边 BC 交于点 D ， $DE \perp AB$ 于点 E ， $S_{\triangle ABC} = 28$ ， $DE = 4$ ， $AC = 6$ ，则 AB 的长为 _____ .



【答案】8

【解析】过 D 点作 $DH \perp AC$ 于 H ，



$$\begin{aligned}
&\because AD \text{ 是 } \angle BAC \text{ 的角平分线, } DE \perp AB, DH \perp AC, \\
&\therefore DE = DH = 4. \\
&\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = 28, \\
&S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot DH = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12, \\
&\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE = 28 - 12 = 16, \\
&\therefore \frac{1}{2} AB \times 4 = 16, \\
&\therefore AB = 8.
\end{aligned}$$

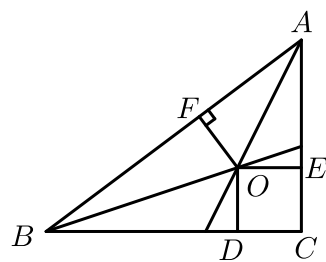
【标注】【思想】数形结合思想

【能力】运算能力

【知识点】角分线性质定理

栗子5

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， O 为 $\triangle ABC$ 的三条角平分线的交点， $OD \perp BC$ ， $OE \perp AC$ ， $OF \perp AB$ ，点 D 、 E 、 F 分别是垂足，且 $AB = 10\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ ， $CA = 6\text{cm}$ ，则点 O 到三边 AB 、 AC 和 BC 的距离分别为（ ）。



- A. 2cm、2cm、2cm B. 3cm、3cm、3cm C. 4cm、4cm、4cm D. 2cm、3cm、5cm

【答案】A

【解析】 $\because \triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 10\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ ， $CA = 6\text{cm}$ ，

$\therefore$ 点 O 为 $\triangle ABC$ 的三条角平分线的交点，

$\therefore OE = OF = OD$ ，

设 $OE = x$ ，

$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OCB}$

$\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = \frac{1}{2} OF \times 10 + \frac{1}{2} OE \times 6 + \frac{1}{2} OD \times 8$ ，

$\therefore 5x + 3x + 4x = 24$ ，

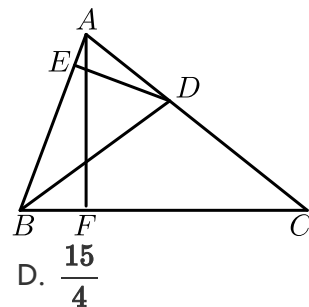
$\therefore x = 2$ ，

即点 O 到三边 AB ， AC 和 BC 的距离都等于2。

故选A。

【标注】【知识点】角分线性质定理

10. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ， BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \perp AB$ 于点 E ， $AF \perp BC$ 于点 F ，若 $DE = 2$ ，则 AF 的长为（ ）。



A. 3

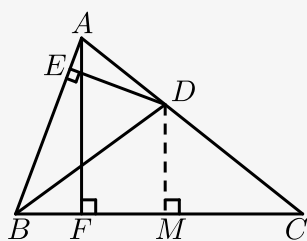
B. $\frac{10}{3}$

C. $\frac{7}{2}$

D. $\frac{15}{4}$

【答案】 B

【解析】 如图，过点D作 $DM \perp BC$ ，



$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ，

又 $\because DE \perp AB$ ， $DM \perp BC$ ，

$\therefore DE = DM$ ，

则 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDC}$ ，

又 $\because AF \perp BC$ ，

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AF = \frac{1}{2}AB \cdot DE + \frac{1}{2}BC \cdot DM$ ，

即 $BC \cdot AF = (AB + BC) \cdot DE$ ，

$\because AB = 4$ ， $BC = 6$ ， $DE = 2$ ，

$\therefore 6AF = (4 + 6) \times 2$ ，

$AF = \frac{10}{3}$ ，

则 AF 的长是 $\frac{10}{3}$ 。

故选B。

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】角分线性质定理

▮ 独步天下1

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线相交于点O，过点O作 $EF \parallel BC$ 交AB于E，交AC于F，过点O作 $OD \perp AC$ 于D，下列结论：

① $EF = BE + CF$ ；

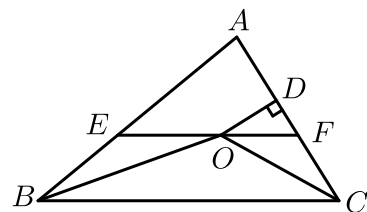
②点 O 到 $\triangle ABC$ 各边的距离相等；

③ $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ ；

④设 $OD = m$ ， $AE + AF = n$ ，则 $S_{\triangle AEF} = mn$ ；

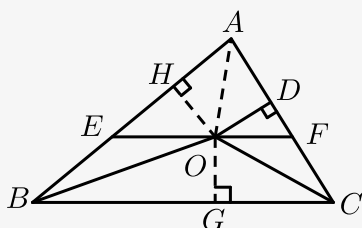
⑤ $AD = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$ 。

其中正确的结论是 _____。



【答案】 ①②③⑤

【解析】 方法一： $\because BO$ 平分 $\angle ABC$ ， CO 平分 $\angle ACB$ ，



$$\therefore \angle EBO = \angle OBC, \angle OCB = \angle FCO,$$

$$\therefore EF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle EOB, \angle OCB = \angle FOC,$$

$$\therefore \angle EBO = \angle EOB, \angle FOC = \angle FCO,$$

$$\therefore BE = OE, CF = FO,$$

$$\therefore EF = OE + FO,$$

$$\therefore EF = BE + CF, \text{ 故①正确；}$$

过 O 分别作 AB ， BC 的垂线，垂足分别为 H ， G ，连接 AO ，

$$\therefore OB \text{ 平分 } \angle ABC, CO \text{ 平分 } \angle ACB, OD \perp AC,$$

$$\therefore OG = OH, OG = OD,$$

$$\therefore OD = OG = OH,$$

$\therefore$ 点 O 到 $\triangle ABC$ 各边的距离相等，故②正确；

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB + \angle A = 180^\circ,$$

$$\therefore 2\angle OBC + 2\angle OCB + \angle A = 180^\circ,$$

$$\text{又 } \angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A, \text{ 故③正确；}$$

$$\therefore OD = OH = m, AE + AF = n,$$

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle AEF} &= S_{\triangle AOE} + S_{\triangle AOF} \\ &= \frac{1}{2} OH \cdot AE + \frac{1}{2} OD \cdot AF \\ &= \frac{1}{2} m(AE + AF) \\ &= \frac{1}{2} mn, \text{ 故④错误;} \end{aligned}$$

在 $\triangle COG$ 和 $\triangle COD$ 中,

$$\begin{cases} \angle OGC = \angle ODC \\ \angle OCG = \angle OCD, \\ OC = OC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle COG \cong \triangle COD (\text{AAS}).$$

$$\therefore CG = CD,$$

同理可得 $BG = BH, AH = AD,$

$$\begin{aligned}\therefore AB + AC - BC \\ &= AH + BH + AD + CD - BG - CG \\ &= AH + AD \\ &= 2AD.\end{aligned}$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}(AB + AC - BC). \text{ 故⑤正确.}$$

$\therefore$ 正确的结论是①②③⑤.

方法二： $\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 O ,

$$\therefore \angle OBC = \frac{1}{2} \angle ABC, \angle OCB = \frac{1}{2} \angle ACB, \angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC + \angle OCB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A,$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - (\angle OCB + \angle OCB) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A;$$

故③正确;

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 O ,

$$\therefore \angle OBC = \angle OBE, \angle OCB = \angle OCF,$$

$$\therefore EF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle EOB, \angle OCB = \angle FOC,$$

$$\therefore \angle EOB = \angle OBE, \angle FOC = \angle OCF,$$

$$\therefore BE = OE, CF = OF,$$

$$\therefore EF = OE + OF = BE + CF,$$

故①正确;

过点 O 作 $OM \perp AB$ 于 M , 作 $ON \perp BC$ 于 N , 连接 OA ,

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 O ,

$$\therefore ON = OD = OM = m,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore S_{\triangle AEF} &= S_{\triangle AOE} + S_{\triangle AOF} \\
 &= \frac{1}{2}AE \cdot OM + \frac{1}{2}AF \cdot OD \\
 &= \frac{1}{2}OD \cdot (AE + AF) \\
 &= \frac{1}{2}mn;
 \end{aligned}$$

故④错误；

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 O ，

$\therefore$ 点 O 到 $\triangle ABC$ 各边的距离相等，故②正确．

$\therefore AM = AD, BM = BN, CD = CN,$

$\therefore AM + BM = AB, AD + CD = AC, BN + CN = BC,$

$\therefore AD = \frac{1}{2}(AB + AC - BC),$

故⑤正确．

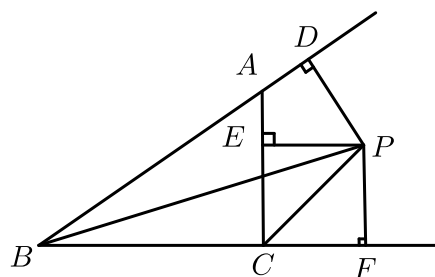
故答案为：①②③⑤．

【标注】【知识点】垂直构对称

2. 角平分线的判定

栗子6

12. 如图，点 P 是 $\triangle ABC$ 外的一点， $PD \perp AB$ 于点 D ， $PF \perp BC$ 于点 F ，连接 PB ， PC ，若 $PD = PE = PF$ ， $\angle BAC = 70^\circ$ ，则 $\angle BPC$ 的度数为（ ）．



A. 25°

B. 30°

C. 35°

D. 40°

【答案】C

【解析】在 $\text{Rt}\triangle BDP$ 和 $\text{Rt}\triangle BFP$ 中，

$$\therefore \begin{cases} PD = PF \\ BP = BP \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BDP \cong \text{Rt}\triangle BFP (\text{HL}),$

$\therefore \angle ABP = \angle CBP,$

在 $\text{Rt}\triangle CEP$ 和 $\text{Rt}\triangle CFP$ 中，

$$\therefore \begin{cases} PE = PF \\ PC = PC \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle CEP \cong \text{Rt}\triangle CFP (\text{HL})$ ，

$\therefore \angle ACP = \angle FCP$ ，

$\therefore \angle ACF$ 是 $\triangle ABC$ 的外角，

$\therefore \angle ABC + \angle BAC = \angle ACF$ ，

两边同时除以2，得 $\frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle ACF$ ，

即 $\angle PBC + \frac{1}{2}\angle BAC = \angle FCP$ ，

$\therefore \angle PCF$ 是 $\triangle BPC$ 的外角，

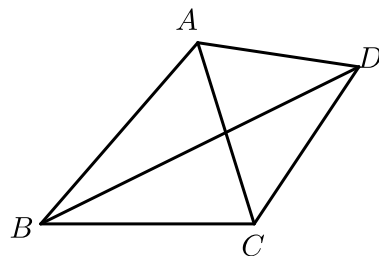
$\therefore \angle PBC + \angle BPC = \angle FCP$ ，

$\therefore \angle BPC = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2} \times 70^\circ = 35^\circ$ 。

【标注】【知识点】角分线性质定理；模型综合运用

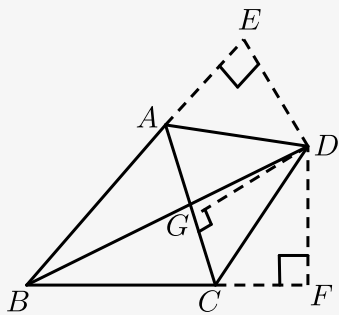
栗子7

13. 已知：四边形 $ABCD$ 中，对角线 BD 平分 $\angle ABC$ ， $\angle ACB = 72^\circ$ ， $\angle ABC = 50^\circ$ ，并且 $\angle BAD + \angle CAD = 180^\circ$ ，那么 $\angle BDC$ 的度数为 _____。



【答案】 29°

【解析】 过点 D 分别作 BA ， BC ， AC 的垂线，垂足分别为 E ， F ， G ，



由 $\angle BAD + \angle CAD = 180^\circ$ ，

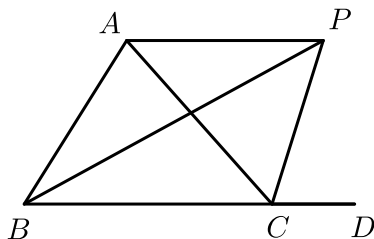
可得 AD 平分 $\angle EAC$ ，

进而得 CD 平分 $\angle ACF$,

由三角形内外角平分线夹角模型得 $\angle BDC = \frac{1}{2} \angle BAC = 29^\circ$.

【标注】【知识点】角分线性质定理

14. 如图, $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACD$ 的平分线 CP 与内角 $\angle ABC$ 平分线 BP 交于点 P , 若 $\angle BPC = 40^\circ$, 则 $\angle CAP =$ _____ .



【答案】 50°

【解析】延长 BA , 作 $PN \perp BD$, $PF \perp BA$, $PM \perp AC$,

设 $\angle PCD = x^\circ$,

$\because CP$ 平分 $\angle ACD$,

$\therefore \angle ACP = \angle PCD = x^\circ$, $PM = PN$,

$\because BP$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABP = \angle PBC$, $PF = PN$,

$\therefore PF = PM$,

$\because \angle BPC = 40^\circ$,

$\therefore \angle ABP = \angle PBC = \angle PCD - \angle BPC = (x - 40)^\circ$,

$\therefore \angle BAC = \angle ACD - \angle ABC = 2x^\circ - (x^\circ - 40^\circ) - (x^\circ - 40^\circ) = 80^\circ$,

$\therefore \angle CAF = 100^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle PFA$ 和 $\text{Rt}\triangle PMA$ 中,

$$\therefore \begin{cases} PA = PA \\ PM = PF \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle PFA \cong \text{Rt}\triangle PMA$ (HL) ,

$\therefore \angle FAP = \angle PAC = 50^\circ$.



栗子8

- (1) 证明 : $CF = EB$.
(2) 证明 : $AB = AF + 2EB$.

(2) 证明见解析.

$$\begin{cases} \angle CAD = \angle EAD \\ \angle ACD = \angle AED, \\ AD = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CAD \cong \triangle EAD \text{ (AAS)} .$$

$$\therefore DE = DC ,$$

在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 和 $\text{Rt}\triangle EDB$ 中 ,

$$\begin{cases} DF = BD \\ DC = DE \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CDF \cong \text{Rt}\triangle EDB \text{ (HL)} .$$

$$\therefore CF = EB .$$

(2) 由 (1) 得 $\triangle ADC \cong \triangle ADE$,

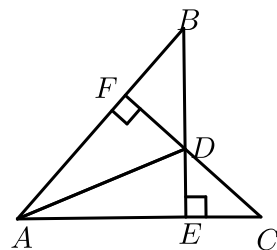
$$\therefore AC = AE , CF = EB .$$

$$\therefore AB = AE + BE = AC + EB = AF + CF + EB = AF + 2EB .$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

栗子9

16. 如图, 已知 $BE \perp AC$ 于 E , $CF \perp AB$ 于 F , BE 、 CF 相交于点 D , 若 $BD = CD$. 求证: AD 平分 $\angle BAC$.



【答案】证明见解析.

【解析】 $\because BE \perp AC, CF \perp AB$,

$$\therefore \angle BFD = \angle CED = 90^\circ ,$$

在 $\triangle BDF$ 与 $\triangle CDE$ 中

$$\begin{cases} \angle BFD = \angle CED \\ \angle BDF = \angle CDE , \\ BD = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CDE \text{ (AAS)} ,$$

$$\therefore DF = DE ,$$

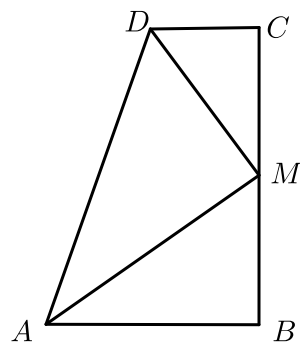
$$\because BE \perp AC, CF \perp AB, DF = DE ,$$

$$\therefore AD \text{ 平分 } \angle BAC .$$

【标注】【知识点】AAS

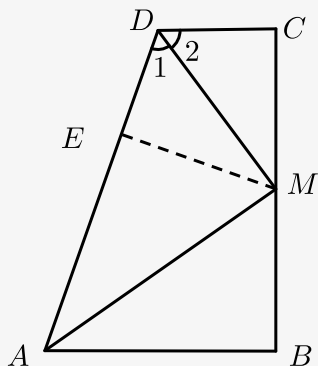
17. 已知：如图， $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ， M 是 BC 的中点， DM 平分 $\angle ADC$ 。

求证： AM 平分 $\angle DAB$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】过点 M 作 $ME \perp AD$ ，垂足为 E ，



$\because DM$ 平分 $\angle ADC$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ，

$\because MC \perp CD$ ， $ME \perp AD$ ，

$\therefore ME = MC$ （角平分线上的点到角两边的距离相等），

又 $\because MC = MB$ ，

$\therefore ME = MB$ ，

$\because MB \perp AB$ ， $ME \perp AD$ ，

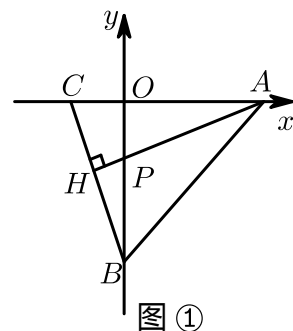
$\therefore AM$ 平分 $\angle DAB$ （到角的两边距离相等的点在这个角的平分线上）。

【标注】【知识点】角分线性质定理

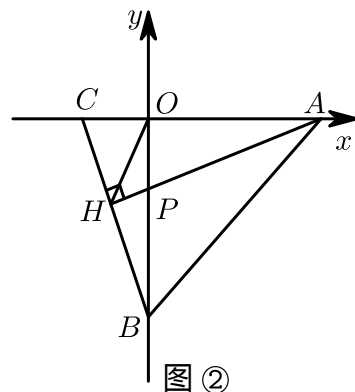
独步天下2

18. 如图所示，直线 AB 交 x 轴于点 $A(4, 0)$ ，交 y 轴于点 $B(0, -4)$ 。

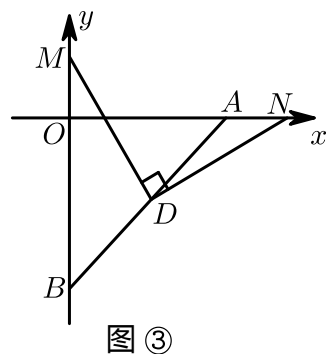
（1）如图①，若 C 的坐标为 $(-1, 0)$ ，且 $AH \perp BC$ 于点 H ， AH 交 OB 于点 P ，试求点 P 的坐标。



(2) 如图②，在(1)的条件下，连接 OH ，求 $\angle OHC$ 的度数。



(3) 如图③，若点 D 为 AB 的中点，点 M 为 y 轴正半轴上一动点，连接 MD ，过 D 作 $DN \perp DM$ 交 x 轴于 N 点，当 M 点在 y 轴正半轴上运动的过程中，式子 $S_{\triangle BDM} - S_{\triangle ADN}$ 的值是否发生改变？如发生改变，求出该式子的值的变化范围；若不改变，求该式子的值。



【答案】(1) $P(0, -1)$.

(2) 45° .

(3) $S_{\triangle BDM} = S_{\triangle ADN}$ 的值不发生改变，等于4 .

【解析】(1) $OA = OB = 4$,

$\because AH \perp BC$ 即 $\angle AHC = 90^\circ$, $\angle COB = 90^\circ$,

$\therefore \angle HAC + \angle ACH = \angle OBC + \angle OCB = 90^\circ$,

$\therefore \angle HAC = \angle OBC$,

在 $\triangle OAP$ 与 $\triangle OBC$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle COB = \angle POA = 90^\circ \\ OA = OB \\ \angle OAP = \angle OBC \end{cases},$$

$\therefore \triangle OAP \cong \triangle OBC (\text{ASA})$,

$\therefore OP = OC = 1$,

则 $P(0, -1)$.

(2) 过 O 分别作 $OM \perp CB$ 于 M 点, 作 $ON \perp HA$ 于 N 点, 如图2,

在四边形 $OMHN$ 中, $\angle MON = 360^\circ - 3 \times 90^\circ = 90^\circ$,

$\therefore \angle COM = \angle PON = 90^\circ - \angle MOP$,

在 $\triangle COM$ 与 $\triangle PON$ 中,

$$\begin{cases} \angle COM = \angle PON \\ \angle OMC = \angle ONP = 90^\circ \\ OC = OP \end{cases},$$

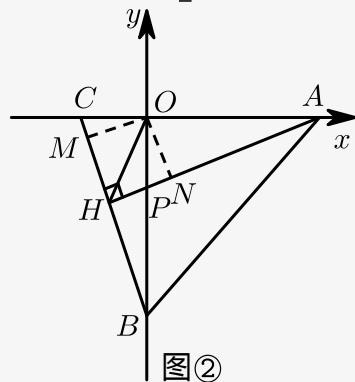
$\therefore \triangle COM \cong \triangle PON (\text{AAS})$,

$\therefore OM = ON$,

$\therefore OM \perp CB, ON \perp HA$,

$\therefore HO$ 平分 $\angle CHA$,

$\therefore \angle OHP = \frac{1}{2} \angle CHA = 45^\circ$.



(3) $S_{\triangle BDM} - S_{\triangle ADN}$ 的值不发生改变, 等于4.

理由如下:

连接 OD , 如图3,

$\because \angle AOB = 90^\circ, OA = OB, D$ 为 AB 的中点,

$\therefore OD \perp AB, \angle BOD = \angle AOD = 45^\circ, OD = DA = BD$,

$\therefore \angle OAD = 45^\circ, \angle MOD = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$,

$\therefore \angle DAN = 135^\circ = \angle MOD$,

$\because MD \perp ND$ 即 $\angle MDN = 90^\circ$,

$\therefore \angle MDO = \angle NDA = 90^\circ - \angle MDA$,

在 $\triangle ODM$ 与 $\triangle ADN$ 中,

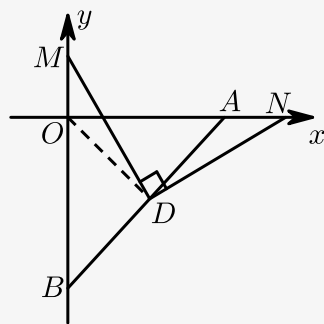
$$\begin{cases} \angle MDO = \angle NDA \\ \angle DOM = \angle DAN, \\ OD = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ODM \cong \triangle ADN (\text{ASA}),$$

$$\therefore S_{\triangle ODM} = S_{\triangle ADN},$$

$\therefore$

$$S_{\triangle BDM} - S_{\triangle ADN} = S_{\triangle BDM} - S_{\triangle ODM} = S_{\triangle BOD} = \frac{1}{2} S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} AO \cdot BO = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 4$$



图③

【标注】【知识点】角分线性质定理